

NOTATER

1993

- 1993-1 Martin Lippert-Rasmussen og Niels Peter Møls: "Transaktionskostteori - en introduktion til Williamson".
- 1993-2 Jørn Flohr Nielsen: "Kunde- og klientinddragelse i serviceformidlingen - en introduktion med et organisatorisk perspektiv".
- 1993-3 Per Nikolaj D. Bulh: "Afvigende observationer eller gennemsnitstendenser? - en note om anvendelse af randmetoder til beregning af aldershængede præstationer og stjernetider".

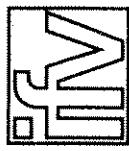
Notat 1993-3

Afvigende observationer eller gennemsnitstendenser

En note om anvendelse af randmetoder til beregning af aldershængede præstationer og stjernetider

af Per Nikolaj D. Bulh





INSTITUT FOR
VIRKSOMHEDSLEDELSE

Notat 1993-3

Afvigende observationer eller gennemsnitstrender

En note om anvendelse af randmetoder til beregning af aldersbetegnede præstationer og stjerneider

Af Per Nikolaj D. Bulkh



INSTITUTE OF MANAGEMENT
UNIVERSITY OF AARHUS 1993

Afvigende observationer eller gennemsnitstender? Et notat om anvendelse af randmetoder til beregning af aldersbetingede præstationer og stjernetider

Per Nikolaj D. Buhl^{*}
Institut for Virksomhedsledelse
Aarhus Universitet

November 1991
Revideret 13. juli 1993

Abstract

Modern neoclassical production theory typically ignore the possibility that producers might operate inefficiently. But outside the mainstream of neoclassical theory, the study of efficiency and its measurement has for the last two decades been undertaken by a number of writers. The result of this effort has been the development of a wide range of so-called frontier methodologies. This note emphasizes the applicability of frontier methodologies in numerous circumstances outside traditional production theory and especially a technique for handicapping road races based on age and sex, is described. Linear programming is used to calculate a frontier function describing where the records for a particular age and running race should be. The method is used to calculate ideal record for a popular danish running race. A revised list of results are presented, where the actual results are adjusted for age and sex. Further, it is demonstrated how the model can be used in evaluating the training effort between subsamples of individuals and in a timeseries framework. In conclusion other applications of the technique are suggested.

^{*}Data er mod venlig hjælp fra Lars Møller Nielsen stillet til rådighed af Marsels-Løbet, Århus. Tak til Niels Peter Møls og Jens O. D. Buhl for kommentarer til tidligere versioner af dette notat.

1 Indledning

Når et antal organisatoriske enheder, der udfører sammenlignelige opgaver, skal evalueres for at afgøre, hvilke enheder, der er effektive, og hvilke, der er ineffektive, kravet der ofte anvendelse af kvalitative vurderinger og arbitrale eller subjektive vagte. Opgaven bliver især vanskelig, når præstationerne måles på flere dimensioner, hvis flere produktionsfaktorer anvendes, hvis der ikke eksisterer priser på produkter eller produktionsfaktoren, eller hvis de organisatoriske enheder er påvirket af eksogene variabler.

I den sidste halve snes år har der været stadig stigende forskningsmæssig interesse for at løse sådanne evalueringssproblemer ved anvendelse af såkaldte randmetoder. D.v.s. metoder, der eksplicit fokuserer på de ekstremale observationer og deres afvigelser fra de resterende observationer. Disse metoder har vist sig at udgøre et meget slagkraftigt analyseapparat ved empiriske studier af relativ efficiens.

Dette notaat tjener et dobbelt formål. For det første vil jeg argumentere for, at studiet af produktivitet og efficiens inden for rammerne af mikroøkonomisk produktionsteori kan give frugtbar indsigt i en række problemstillinger. Nøglen til at behandle præstationsforskelle eller forskelle i efficiens mellem analyserede enheder er anvendelsen af randmetoder.

Efter at have diskuteret anvendelsen af randmetoder i en bred forstand vil jeg som notatets andet formål vise, hvorledes en deterministisk parametrisk randmetode kan anvendes til at korrigere personers fysiske præstationer for forskelle i alder og køn. Den konkrete præstation, der anvendes som eksempel, er gennemførelsen af det århustanske motionsløb *Marselis Løbet*, der hvert år samler et stort antal deltagere i alle aldre. Det vises desuden, hvordan metoden kan anvendes til at analysere forskelle mellem undergrupper af idrætsudøvere, f.eks. under påvirkning af alternative træningsprogrammer, samt hvordan metoden kan anvendes til at bestemme såkaldte stjernetider, d.v.s. opnåelige idealpræstationer.

Umiddelbart kan det synes umuligt at kombinere disse to formål. Men randmetoder repræsentører en metodologisk nytænkning, og det kan derfor være en fordel at betragte en problemstilling, som vi ikke på forhånd har en fastlåst forståelse for, hvorledes skal behandles.

I afsnit 2 introduceres randmetoder med udgangspunkt i den mikroøkonomiske produktions teori. Desuden diskuteres betydningen af inefficiens i traditionel teori samt anvendelse af randmetoder ved analyse af flere forskellige økonomiske problemstillinger. Dernæst beskrives Marselis-Løbets data og problemstillingen omkring fastlæggelse af stjernetider i afsnit 3. Den anvendte metode introduceres i afsnit 4, og analysens resultater præsenteres i afsnit 5. I det afsluttende afsnit 6 gives nogle afsluttende bemærkninger om anvendelsen af randmetoder, og andre anvendelser af metoden foresås.

2 Anvendelse af produktionsteori og randmetoder

I dette notat skal vi ikke forløge en præcis definition af, hvad randmetoder er. I stedet skal metoderne introduceres med reference til den mikroøkonomiske produktionsteori, hvor de har deres oprindelse.

Denn norske nobelprismodtager Ragnar Frisch definerede produktion bredt som enhver transformering der kontrolleres af mennesker, eller som mennesker har interesse for, d.v.s en transformering, som af nogle mennesker bliver anset som formålstjenlig (Frisch 1962, p. 15). Denne transformering kan være kvalitativ i den forstand, at arbejdsindsats, komponenter og mellemprodukter bliver omdannet til færdigvarer, der er markante, anderledes end dele, de blev fremstillet af. Transformeringen kan også bestå i en flyning, sortering eller opbevaring; og produkterne, der fremstilles i produktionssprocessen, behøver således ikke være materielt forskellige fra de indsatsfaktorer, de blev lavet af. Produktene behøver heller ikke være materielle i traditionel forstand, men kan også være tjenesteproduktion. Se også Hoef og Moene (1987). Der tales her om faktisk vedgørende transformationen, som kan beskrives rent objektivt i tekniske termér, hvilket betyder, at der ikke tages stilling til, hvorvidt det er muligt at male den værdi, som produktionen skaber.

Transformeringen kan mere generelt frembringe et antal produkter, hvis frembringelse ikke kan adskilles uden videre; og alle frembringelserne ved transformeringen behøver ikke nødvendigvis at være goder – tank blot på forurening (f.eks. Färe *et al.* 1989) eller pengestrømmers tab (f.eks. Bulth 1992). Og der kan eksistere en rekke restriktioner på forholdet mellem indsatsfaktorerne og de frembragte produkter. For eksempel er det ikke givet, at man kan undlade at anvende indsatsfaktorer, der har et negativt resultat på slutresultatet – såkaldt “input congestion” (jf. Färe, Grosskopf og Lovell 1985).

Når man anlægger et mere abstrakt syn på produktionssprocessen, kan produktionsteoretiske metoder anvendes i mange forskelligartede sammenhænge. Blandt andet kan forskellige beslutningsproblemer formuleres ved hjælp af moderne produktionstheorie og produktivitetssteori. For eksempel analyserede Thompson *et al.* (1986) et lokaliseringssproblem – valget mellem mulige placeringer af et fysiklaboratorium udrustet med en energikravende accelerator – ved hjælp af en produktivitetsmodel. Det betegnede ikke noget med en energikravende accelerator – om end stadig lidt utraditionel, idet det illustreres, at en sportsrestaurat kan opfattes som frembragt ved en produktionssproces.

Sammenhængen mellem de produktionstekniske forhold ved transformeringen beskrives ofte inden for rammerne af en produktionsteori. I den indledende mikroøkonomi repræsenteres produktionsteknologiens struktur normalt ved en skalarfunktion, mens man ofte vælger at beskrive produktionsteknologiens struktur ved hjælp af mængde-til-mængde korrespondencer, når transformeringssprocessen frembringer en vektor af output ved anvendelse af en vektor af input. Det kan fortset være nyttigt at have en funktionel beskrivelse af produktionsteknologiens struktur, men eksistensen af en sådan fælles produktionsteori kan ikke uden videre afledes fra produktionskorrespondencen, som den refererer til (Shephard 1970, p. 213).

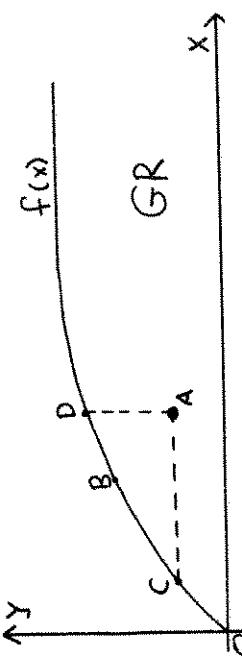
For at operationalisere produktionsteorien skelner økonomer sædvanligvis mellem begreberne teknik og teknologi, således at en teknik på et område angiver en metode, mens teknologi er den samlede viden om alle de tekniske metoder.

Den producerende enhed, som her vil blive kaldt en virksomhed, uden at der dermed er taget stilling til dens karakter, antages generelt at anvende en vektor af indsatsfaktorer (x_1, x_2, \dots, x_n) til at producere en vektor af produkter (y_1, y_2, \dots, y_m) . Her vil det blive antaget, at y er et skalar gode, idet det letter beskrivelse af randfunktion, men ved anvendelse af produktionskorrespondencer kan teorien generaliseres, som det f.eks. gøres af Färe, Grosskopf og Lovell (1985).

Virksomhedens teknologiske muligheder udtrykkes ved uligheden

$$y \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

hvor $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ er den maksimale mængde af y , der kan produceres, givet indsatsen af (x_1, x_2, \dots, x_n) . Uligheden i (1) udtrykker, at virksomheden kan producere en mængde, der er mindre end $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Vi siger da, at ledelsen har valgt en mindre efficiens teknik. Den væsentlige observation er her, at en produktionsteori udtrykker en ekstremal sammenhæng, som vi vil betegne en *randfunktion*.



Figur 1: Produktionsfunktion for tilfældet ét input og ét output

For tilfældet, hvor der ved anvendelse af én indsatsfaktor, x , fremstilles ét produkt, y produktionsteoriens, $f(x)$, vist i figur 1. Området afgrænset af x -aksen og $f(x)$ angiver mulige kombinationer af input og output, og det betegnes sædvanligvis produktionsmulighedsområdet.

I overensstemmelse med virksomhedens målsætning vælger ledelsen den produktionsplan, (x_1, x_2, \dots, x_n) , der bedst opfylder målsætningen. Det er ikke givet, at den traditionelle profitmaximering er den bedste beskrivelse af virksomhedens målsætning. Dels kan det være vanskeligt at etablere rimelige priser, og dels kan alternativer som omkostningsminimering med eksogen givet output eller indtjeningsmaximering med eksogen givet input være mere rimelige målsætninger (jf. Färe, Grosskopf og Lovell 1985, p. 192). Hvad der er tilfældet afhænger af de konkrete omstændigheder.

Hvis ledelsen vælger en anden teknik end den, der giver størst produktion og anvender farrest ressourcer under hensyn til virksomhedens målsætning, siges produktionsplanen

at være inefficent. For en anden kombination af indstøtsfaktorer er det ikke nødvendigtvis den samme teknik, der er mest efficiens, d.v.s. som giver den største produktion. Blandt virksomhedens teknologiske muligheder er der til en hver kombination af indstøtsfaktorer mindst én teknik, som giver den største produktionsmængde. Det er denne sammenhæng mellem det størst mulige udbytte ved produktionstransformering og indsatseren af de enkelte faktorer, der udgør den efficiente produktionsfunktion – eller randfunktionen.

Uden at gå i detaljer er der i figur 1 vist, at en virksomhed, der producerer ved A, er inefficent, idet det er muligt at producere ved C og dermed fremstille det samme ved et mindre faktorforbrug eller at producere ved D, hvor der kan fremstilles mere med det muligt at fremstille mere ved det givne faktorforbrug eller at producere det samme ved mindre faktorforbrug. Virksomheden, der er placeret ved B, er efficiens, da det ikke er muligt at fremstille skaførlast, som det er tilfældet på figur 1, ved at reducere faktorforbruget, hvilket viser, at B ligger på den efficiente produktionsfront. Som det antydes, er efficiens nært knyttet til Pareto-optimalitet eller Pareto-Koopmans optimalitet, som det også kaldes (Charnes og Cooper 1961, kapitel 9; Charnes og Cooper 1985).

Virksomheden E er i figur 1 placeret på det vandrette stykke af produktionsfunktionen, og dens klassifikation er afhængig af virksomhedens målsætning. Hvis input anses for ek-søgent givet, kan det være rimeligt at betegne E som efficiens, mens E ikke kan være efficiens under traditionel profitmaximering. Fastlæggelsen af produktions-teknologiens struktur og derned af produktionsfunktions form er en empirisk opgave, og figur 1 skal blot opfattes som et eksempel. Tilsvarende det vandrette stykke af $f(x)$ kunne der typisk forekomme et lodret stykke, og $f'(x)$ behøver naturligvis hverken være peakt differentielabel eller kontinuitet; og $f''(x)$ kunne også omfatte områder med varierende stordriftskarakteristika og ikke kun aftagende skaførlast, som det er tilfældet på figur 1.

Efficiensbegrebet anvendes i dette notat som et relativt begreb, der karakteriserer ressourceneffektiviteten, således at organisatoriske enheders præstationer sammenlignes med en standard, bestemt af de mest efficiente enheders præstationer. Efficiens er dermed også et produktivitetsudtryk for de enkelte enheders præstationer ved transformering af input til output (c.f. Førsund og Hjalmarsson 1974, 1987).

2.1 Inefficiens i traditionel teori

Den neo-klassiske teori for enkeltproduktvirksomheden, der anvender pris eller mængde som strategisk variabel i statiske, men ekstremt konkurrenceprægede omgivelser, har præget den mikroøkonomiske virksomheds-teori, ligesiden Cournot mere eller mindre opfandt modellen i 1838. Og ligesiden har den været udsat for konstant kritik. Det har især været profitmaximeringshypotesen, der har stået for skad. Se for eksempel Blaug (1992, kapitel 7) eller Knudsen (1991) for en sammenfatning af diskussionen. Forskelle i virksomhedernes efficiens er et empirisk uomtvisteligt fænomen, der står i modsætning til den ortodokse produktions-teori, der forudsætter, at alle virksomheder producerer i henhold til en produktionsfunktion og dermed implicit forudsætter, at alle virksomheder er fuldt efficiente.

På den teoretiske side repræsenterer det et fremskridt for produktions-teori'en, at der

produktions-teori'en) som "[v]i skal i resten af boka forutsette efficiens produksjon" (Hoel og Moene 1987, p. 27).

Det empiriske modstykke til udviklingen af produktions-teori under hensyntagen til forskelle i efficiens repræsenternes af udviklingen af randmetoderne, der udgør en metodisk fornyelse i forhold til traditionelle statistiske metoder. Ved at fokusere på afvigende observationer ("outliers") fremfor central-tendenser kan eksempelvis god ledelse potentielt identificeres, og betydningen heraf for den organisatoriske enheds præstationer kan forklares ved at identificere variablers kontrollerbarhed og korrigere præstationsmålene herfor (Daft og Lewin 1990; Lewin 1992; Lewin og Minton 1986).

Det er sjældent, at økonomisk forskning bringer resultater baseret på afvigende observationer. Efter traditionel økonometrisk forsknings-metode repræsenterer afvigende observationer stikprøvefejl, maftejfej, misspecifikation etc. Det er imidlertid ofte de afvigende observationer, der repræsenterer de egenskaber, som vi analyserer, og betydelig indsigts kan desfor opnås ved at fokusere på de bedste eller dårligste observationer. Gennemsnittsorganisacionen eksisterer ikke, og den er aldrig på forkant med de fenomener, som vi ønsker at undersøge.

2.2 Anvendelse af randmetoder

I samfundsvidenskaberne ses ofte på relative præstationer ved at foretage passende sammenligninger med et referencepunkt. Et sådant referencepunkt kan i mange tilfælde udgøres af en randfunktion. Det er for eksempel tilfældet ved evaluering af relativ efficiens eller produktivitet, hvor anvendelse af randfunktion eller produktionsfronten, som de også kaldes, har fundet stor udbredelse. Referencepunktet angiver da det maksimalt opnægde resultat som funktion af faktorinput.

Peters og Waterman (1982) identificerede eksempelvis en række virksomheder som "excellent" ved at sage de afvigende observationer, og Lawrence og Lorsch (1967) udviklede contingency teorien ved at fokusere på de bedste og de dårligste præstationer.

Et andet eksempel, hvor det er afvigende observationer, der er af interesse, er de finansielle tilsynsmyndigheders anvendelse af såkaldte "early warning systems" (jf. Charnes og Cooper 1990), d.v.s. beslutningsstøttesystemer, der kan bistå ved at udpege finansielle virksomheder, der er ved at komme i vanskeligheder. Dette kan gøres ved at udpege virksomheder, der adskiller sig fra de resterende virksomheder; for eksempel ved en kombination af, at deres soliditet er lavere i forhold til strukturen af deres aktiver og passiver og at afsigelser i rente- og valutaratio falder sammen med et afvigende vækstmønster. Ved at sammenholde de individuelle finansielle virksomheder med 'bedste praksis'-virksomheder kan tilsynsmyndighederne på et tidligt tidspunkt udvælge de virksomheder, der skal underkastes en nærmere inspektion. En sådan synsvinkel er anlagt af Charnes *et al* (1993) samt Sims (1992).

Endelig skal det også bemærkes, at problemstillingen, der behandles i dette notat, på mange måder svarer til de problemer, man støder på ved design og implementering af omhostningssystemer (jf. Charnes, Cooper og Rhodes 1981). Typisk fastlægges ved tekniske og driftsøkonomiske analyser forskellige efficiente procedurer og kombinationer af else, der for eksempel formuleres af Hoel og Moene (i en ellers glimrende introduktion til

inputfaktorer, der medgår til produktion af bestemte produkter. På baggrund af disse standarder beregnes såkaldte 'effektivitetsafvigelser', som indikerer faktiske afvigelser fra de fastlagte standarder. Se også Banker (1985) samt Banker og Datar (1987).

En mulighed for at anvende randmetoder i omkostningsanalyser kunne være ved fastlæggelse af efficiente kombinationer af forskellige typer af produktionsfaktorer til opfyldelse af kombinationer af formål eller produkter. Ved at foretage sammenligning mellem tidsperioder eller homogene afdelinger kan inputstandarder fastlægges på et passende organisatorisk niveau. Uden at gå i detaljer med, hvorledes denne analyse kan udføres, skal det blot bemærkes, at de nødvendige oplysninger rummes inden for rammerne af et traditionelt variabilitetsregnskab (Madsen 1969; Israelsen 1983).

Grundlæggende er der to indfaldsvinkler til fastlæggelse af randfunktionen: parametriske metoder, der antager en bestemt funktionel form for rand-funktionen (f.eks. polynomiel, Cobb-Douglas eller translog), og ikke-parametriske metoder, hvor der ikke gøres nogen antagelser. Inden for hver af disse metoder kan man endvidere skelene mellem deterministiske metoder, hvor ingen enhed kan være bedre placeret end random, og stokastiske metoder, hvor en efficiensfordeling introduceres. En sammenlignende oversigt over parametriske og ikke-parametriske metoder gives blandt andre af Førsund, Lovell og Schmidt (1980), Førsund og Hjalmarsson (1987) og Hjalmarsson (1991).

De randmetoder, der er i fokus i dette notalet, kan dateres tilbage til Farrells (1957) og Salters (1960) grundlæggende arbejder; og de har 'de seneste år især fundet stor udbredelse i forbindelse med en metode, der går under navnet *Data Envelopment Analysis* (DEA). Metoden er udviklet sideløbende af forskergrupper fra Texas (f. eks. Charnes, Cooper og Rhodes 1978; Charnes og Cooper 1985; Charnes, Cooper og Thrall 1991), Oslo/Göteborg (f. eks. Førsund og Hjalmarsson 1974, 1978a, 1987) og Illinois (f. eks. Fare 1975; Fare og Lovell 1978; Fare, Grosskopf og Lovell 1985). Metoden, der betegningsemsestig er baseret på anvendelse af lineær programmering, er relativt let at implementere, og den er blevet meget udbredt – ikke mindst på grund af dens begrænsede krav til datamaterialet.

Herudover findes de ikke-parametriske stokastiske metoder, der er udviklet af blandt andre Sengupta (1989). Disse metoder er mere problematiske at anvende, men dor er en vis forskningsmæssig interesse omkring deres udvikling, se f.eks. Charnes og Cooper (1989).

Den mest anvendte randmetode har været DEA, sådædes kan Seiford (1990) opregne 400 engelsksprogede artikler, rapporter og afhandlinger relateret til DEA. I Danmark var de første anvendelser af DEA Jennergren og Obels (1986) evaluering af foriserproduktiviteten for danske økonomiske institutter ved højere herreanstalter samt Pedersen, Olesen og Petersens (1987) analyse af produktiviteten for de seriatiske sygehuse. Herudover har DEA i Danmark været anvendt til produktivitetsvurderinger indenfor toldvæsenet (Petersen 1989) hospitalsvæsenet (Holvad og Leth Hougaard 1992), banksektoren (Bukh 1992, 1993), seminarieområdet (Finansministeriet 1992) og arbejdsformidlingen (Finansministeriet 1992).

3 Marelis-Løbet: Problem og data

Marelis-Løbet er et motionsløb, hvor alle kan deltagе. Ved tilmeldingen kan man vælge mellem en 12 km distance og et kortere løb på 6,2 km. For at give deltagerne et resultat at stræbe efter, har Løbskomiteen for 1,2 km løbet beregnet nogle tider, som kaldes stjernetider eller idealtider. Om disse tiders fastlæggelse skrives der:

"Beregningerne er ikke foretaget på strengt, videnskabeligt grundlag. Men vi mener, at det atsiemt efter kan og alder er tider, som en veltrænet motionist har mulighed for at nå ned under".
Marelis Løbet (1991)

For 6,2 km løbet er der ikke fastlagt nogle stjernetider.

Det datamæssige grundlag for dette notat består af resultatlisterne for Marelis-Løbet i perioden 1987 til 1991. For hver løbet, der har gennemført 12 eller 6,2 km løbet, haves oplysninger om alder, køn og tid. For hvert af de 5 år haves omkring 8.000 observationer for 12 km løbet og 6.000 observationer for 6,2 km løbet. Der skal i dette notat fastlægges handicap, d.v.s. fradrag i løbstiden, som sikrer, at alle løbere kan konkurrere på lige vilkår unset alder og køn. Der beregnes kun handicap for 6,2 km løbet, hvorfør resultater fra 12 km løbet ikke indgår i beregningerne.

Fordelingen af stjernetider for 12 km løbet i 1991 frengår af tabel 1, der illustrerer problematikken omkring fastlæggelsen af den korrekte stjernetid. Det bemærkes, at der er betydeligt flere mænd end kvinder, der gennemfører løbet, og at aldersgruppen 35-39 år er underrepræsenteret i forhold til de omkringliggende aldersinterval. Andelen af mandlige deltagere, der får stjernetider, er signifikant mindre end hos de kvindelige deltagere, 43,83% mod 67,42%, og specielt aldersgruppen 20-34 år er der stor forskel mellem andelen af mænd og andelen af kvinder, der opnår stjernetider. Herudover er det markant, at betydelig flere deltagere i de øvre aldersinterval opnår stjernetider.

Disse forskelle kunne indikere, at ikke alle deltagere har lige store muligheder for at opnå stjernetider givet deres alder og køn. Der er nogle stjerner, der er dyvere end andre. Men det er også muligt, at forskellene afspejler reelle forskelle i præstationerne, for eksempel sådædes at 55-59 årlige kvinder kun deltaget, hvis de virkelig er i stand til at løbe på en god tid, mens en stor del af de mandlige deltagere i aldersgruppen 20-34 år har tilmeldt sig og deltaget uden tilstrækkelig forudgående træning. Mens de kvindelige deltagere er i mindretal på 12 km distancen i 1991, er de til lille overtal på 6,2 km ruten (2.985 kvinder mod 2.145 mænd), så måske indikerer resultaterne også større realisme med hensyn til denne hos kvinder? Hvilkens hypotese, der er mest korrekt, kan ikke afgøres på baggrund af løbsresultaterne.

I det følgende illustreres det, hvordan en parametrisk randmetode kan anvendes til at beregne et alders- og kønsbetinget handicap. Ved anvendelse af disse handicaps beregnes en revideret resultatliste for 6,2 km løbet i 1991. Dernæst vil der blive givet nogle forslag til principper for fastlæggelse af stjernetider, og endelig vil der blive præsenteret en metode til sammenligning af undergrupper for eksempler med henblik på at vurdere effekten af forskellige træningsprogrammer.

Tabel 1
Fordeling af stjernetider ved Marselis Løbet (12 km) 1991 for mænd og kvinder. Antal personer og andel i procent.

Aldersgruppe	Kvinder			Mænd			Samlet		
	antal	pct.	antal	pct.	antal	pct.	antal	pct.	antal
7 - 8 år	4	1	5	80.00	20.00	4	8	50.00	50.00
9 - 10 år	10	2	12	83.33	16.67	22	17	39	56.41
11 - 12 år	12	6	18	66.67	33.33	46	60	106	43.40
13 - 14 år	16	14	30	53.33	46.67	51	72	123	41.46
15 - 19 år	63	48	111	56.76	43.24	160	198	358	44.69
20 - 24 år	331	311	642	51.56	48.44	561	1048	2509	22.36
25 - 29 år	125	51	176	71.92	28.98	354	427	781	45.33
30 - 34 år	225	55	280	80.36	19.64	538	368	906	59.38
35 - 39 år	199	20	219	90.87	9.13	513	235	748	31.42
40 - 44 år	52	11	63	82.54	17.46	272	82	354	68.58
45 - 49 år	50	54	52	22	100.00	0.00	105	26	131
50 - 54 år	22	0	22	100.00	0.00	105	26	131	80.15
55 - 59 år	15	1	16	93.75	6.25	38	10	48	79.17
60 - 64 år	6	0	6	100.00	0.00	19	2	21	90.48
65 - 69 år	0	0	0	100.00	0.00	10	4	14	71.43
70 - 74 år	0	1	1	0.00	100.00	3	3	6	28.57
75 - 80 år	·	·	·	·	·	2	1	3	50.00
Over 80 år	0	1	1	0.00	100.00	2	1	3	66.67
Total	1080	522	1602	67.42	32.58	2698	3457	6155	48.70

Anm.: Herudover gennemførte i 1991 288 mænd og 90 kvinder uden aldersangivelse. 'Ja' angiver, personen, der har opnæt stjernetid, mens 'nej' angiver personer, der ikke opnæde stjernetid. Kolonnen 'samlet' angiver andelen af personer med stjernetider i forhold til det samlede antal personer, når der ikke opdeles på køn.

4 Metode

For hvert aldersstrøm bestemmes den hurtigste præstation i perioden, hvorfra der haves data, for både mænd og kvinder. Disse resultater er de hidtil bedste præstationer givet alder og køn. Det antages således, at disse to faktorer påvirker resultatet, men der ligger ikke noget udzagn heri, om at det er de eneste eller de væsentligste faktorer. Randen af optimale præstationer bestemmes af køn og alder, mens de individuelle afvigelsene herfra er bestemt af personspecifikke faktorer.

For at bestemme, hvorledes de to faktorer alder og køn ('erne) bestemmer den bedste tid (y), vil en standard statistisk/økonometrisk indfaldsvinkel typisk betyde, at en model $y = f(x)$ postuleres, og et støjede indføres for at fange afvigelsel mellem faktiske data og den postulerede form. Dernæst anvendes oftest en mere eller mindre avanceret regressionsmetode til at estimere parametre i $f(x)$.

Men hvad når afvigelsene fra den postulerede funktionelle form ikke er støjed, men er systematiske afvigelsel forårsaget af forhold, der ikke er medtaget i modellen? Svarer ville være, at modellen var fejlspecificeret, og de manglende forklarende variabler måtte inddragges. Midlertid er vi her i en ganske anden situation. Vi ønsker at bestemme en randfunktion, der indhylter de observerede præstationer, og afvigelsel kan per definition kun forekomme til den ene side. Generelt kendes afvigelsernes fordeling ikke, og specielt er der ikke grundlag for at antage, at de er normalfordelte. Det er et forhold, der er problematisk i relation til de fleste traditionelle metoder.

Det væsentligste tekniske problem består i at fastlægge randfunktionen eller den effektive rand, som er den traditionelle betegnelse i den mikroøkonomiske litteratur. I dette tilfælde vil man dog ikke have en deterministisk, parametriske metode til at estimere, men istedet anvendes Aigner og Chu (1968) deterministiske, parametriske metode til at estimere en randfunktion. Denne metode kan også som antyrt af Charnes og Cooper (1985) opfattes som en målprogrammings ("goal programming") teknik, hvor der kun tillades afvigelsel til den ene side (se Charnes og Cooper 1961 Charnes, Cooper og Ferguson 1955).

Estimationen udføres ved at antage, at præstationen (output) begrænses af en deterministisk (produktions) funktion, formelt udtrykt som:

$$y \geq f(x, \theta), \quad (2)$$

Ivor y er løbsresultat, x er alder og f er "produktionsfunktionen", der afhænger af alderen og parametervektoren θ . Randfunktionen (2) indeholder ikke nogen specifikation af køn, idet der vil blive beregnet et stærkt sæt parametere for mænd og kvinder. Herved undgås det at angive en specifik funktionel sammenhæng mellem mænd og kvinders præstationer. Alternativt kunne (2) strives som:

$$y = f(x, \theta) \text{ som ikke-stokastisk. Funktionen } f \text{ bestemmes ved at "estimere" } \theta \text{ som løsning på optimeringsproblemets:} \quad (3)$$

I begge tilfælde opfattes $f(x, \theta)$ som ikke-stokastisk. Funktionen f bestemmes ved at "estimere" θ som løsning på optimeringsproblemets:

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i, \theta)|; \text{ u.b.b. } y_i \geq f(x_i, \theta) \text{ for alle } i, \quad (4)$$

hvor $i = 1, \dots, N$ indekserer observationer.

Den viste formulering er især hensigtsmæssig, når f er lineær i parametrene, idet (4) da udgør et standard LP-problem, men alternativt kriterier for vurdering af Cobb-Douglas typen fra randen, f.eks. minimering af en kvadratisk form af forskellen mellem randen og de observerede præstationer, kan dog også forholdsvis let håndteres ved hjælp af moderne software til matematisk programmering.

I mere generelle økonometriske anvendelser, hvor præstationen afhænger af K faktorer, angivet ved vektorien $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_K)$, har funktioner af Cobb-Douglas typen været meget populære, f.eks. Aigner og Chu (1968) samt Forsund og Hjalmarsson (1979b).

Af interesse for økonomer er det desuden, at LP-formuleringens struktur bevares selv ved

$$\ln y = \ln \alpha_0 + \sum_{k=1}^K \alpha_k \ln x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^K \lambda_{hk} \ln x_k \ln x_h + \ln u. \quad (5)$$

Den anvendte beregningsmetode er ekstremt følsom overfor afvigende observationer, og det er ikke muligt at fortolke støjetet, $y_i - f(x_i, \theta)$, statistisk. Estimater af denne type kan sammenlignes med at anvende en stikprøves maksimum som estimator for populations maksimum, og de vil være særligt følsomme overfor malefejl. Derudover kan der ikke drages statistiske slutninger, og der kan ikke beregnes standardafvigelsel, t-test eller korrelationer, som når der estimeres gennemsnitsfunktionen.

En fristende udvidelse af modellen har været at introducere en eksplicit fordeling for afvigelsene, $\{u_i\}$, og dernæst udledte maximum likelihood (ML) estimater for parametrene i randfunktionen og afvigelsesfunktionen. Men dette er ikke muligt, da regulærhetsbestrictiøerne som vist af Schmidt (1976) for udledning af ML-estimater ikke er opfyldt. Dette skyldes, at variationsområdet for den forklarede variabel afhænger af de estimerede parametre (Forsund og Hjalmarsson 1987). Et mere farbart alternativ er at estimere en stokastisk rand, hvor fejleddet splittes i to komponenter: en komponent med en symmetrisk fordeling, der afspejler sande stokastiske onståndigheder, malefejl etc., og en ensidet afvigelse fra randfunktionen. For at implementere en sådan model må der introduceres specifikke fordelinger for de to komponenter, ligesom det nu antages, at alle observationer er genereret af den samme funktion. Se Forsund, Lovell og Schmidt (1980), Forsund og Hjalmarsson (1987), Bauer (1990) samt Greene (1993).

Da den valgte model synes at give en god beskrivelse af de observerede data, og da der ikke synes at være nogen teori, der kan give yderligere indsigt i den datagenerende proces, er der ikke grundlag for at tvinge mere struktur ned over problemet ved at modellere afvigelsene fra randen.

Den anvendelse af Aigner-Chu modellen, der er behandlet i dette afsnit, blev foreslægt af Camm og Grogan (1988) og desuden anvendt i et par efterfølgende artikler (Camm og Grogan 1992; Grogan, Wilson og Camm 1991), hvor resultaterne blev anvendt til at bestemme aldersbetingede handicaps på standarddistancer for amerikanske landevejsløb.

Den anvendelse af Aigner-Chu modellen, der er behandlet i dette afsnit, blev foreslægt af Camm og Grogan (1988) og desuden anvendt i et par efterfølgende artikler (Camm og Grogan 1992; Grogan, Wilson og Camm 1991), hvor resultaterne blev anvendt til at bestemme aldersbetingede handicaps på standarddistancer for amerikanske landevejsløb. Denne antagelse repræsenterer den eneste strukturelle antagelse, som den opererer med i den valgte model.

Den parametriske rand $f(x) = A + Bx + Cx^2$ er lineær i parametrene $\theta = (A, B, C)$, og (4) udgør derfor et LP-problem, hvori parametrene, $\theta = (A, B, C)$, er variabler. Dette problem løses ved anvendelsen af GAMS (Brooke, Kendrick og Meeraus 1988). For både mænd og kvinder bestemmes først de aldersbetingede rekorder – d.v.s. de hurtigste tider i hver aldersgruppe. Dernæst bestemmes randfunktionen ved at løse (4) med én restriktion for hver alderstrin, i .

	Køn	A	B	C	Minimum for $f(x)$
Kvinde	1715.676	-29.189	0.547	26.66	22.07
Mænd	1485.268	-21.287	0.456	23.33	20.37

Tabel 2: Estimerede parametre for randfunktionen, $f(x) = A + Bx + Cx^2$.

Da køn ikke er inddraget i (4), er der, som vist i tabel 2, estimateret et sæt parametre for i randfunktionen og afvigelsesfunktionen, eventuelt blot som et vertikalt niveauaftskif for rand-funktionen, men dette ønskes ikke, da der ikke er grundlag for at antage en bestient sammenhæng mellem randfunktionen for mænd hhv. kvinder. Den postulerede parametriske form (andengradspolytomium) sikrer, at den estimerede rand får en rimelig form. Ved at tilføje flere led til $f(x)$, f.eks.

$$f^*(x) = f(x) + D/x = A + Bx + Cx^2 + D/x, \quad (6)$$

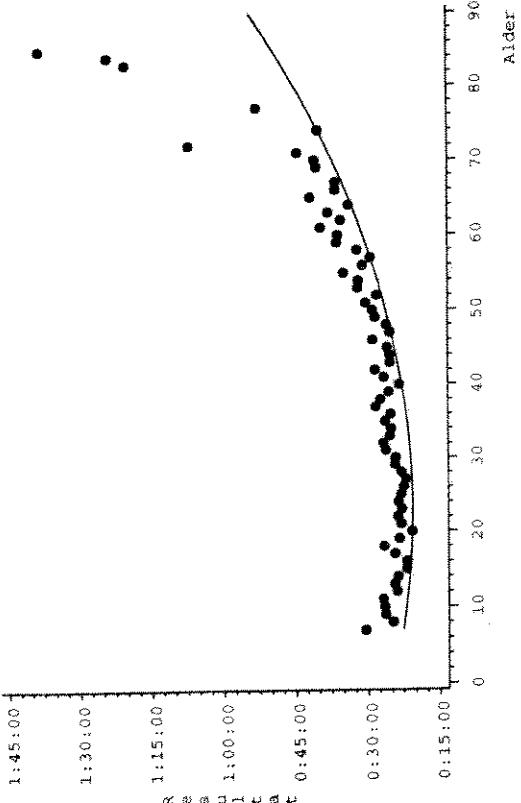
har (4) stadig en lineær kriteriefunktion, og randen vil ligge tættere på observationerne, udtrykt ved, at summen af afvigelsel er mindre, når (6) anvendes som kriteriefunktion. Det viste forslag udgør imidlertid ikke nogen forbedring af modellen, da den estimerede rand ikke kan garanteres at have en rimelig form. I praksis var dette da heller ikke tilfældet, idet de estimerede parametre med $f^*(x)$ som kriteriefunktion gav funktionen den uuhensigtsmæssige egenskab, at $f(x) \rightarrow -\infty$ for $x \rightarrow -\infty$.

Figur 2 viser de bedste præstationer for hvert alderstrin sammen med den estimerede rand-funktion for både mænd og kvinder, der gennemførte 6,2 km løbet i perioden 1987-1991. For hvert køn er randfunktionens minimum vist i tabel 2 sammen med den alder, hvorfra den opnås. Dette minimum kan fortolkes som den teoretisk bedst mulige tid. Da de anvendte data ikke indeholder personernes fødselsdato, er randfunktionens input, x angivet som alderen i år. Det angivne minimum skal derfor fortolkes lidt forsigtigt, da det i realiteten er opgivet med større nøjagtighed end de data, som det er baseret på, tillader. I tabel 3 er den reviderede resultatlister vist. For hver af de 25 bedst placerede deltagerne i realiteten er opgivet med større nøjagtighed end de data, som det er baseret på, tillader. De justerede tider udregnes således, at resultater for en deltager med alderen x frastrækkes den aldersspecifikke effekt, $y - f(x)$, samt en kønspecifik effekt på 20:37-22:07=1:30 minutter – d.v.s. forskellen mellem randfunktionens minimum for mænd h.h.v. kvinder.

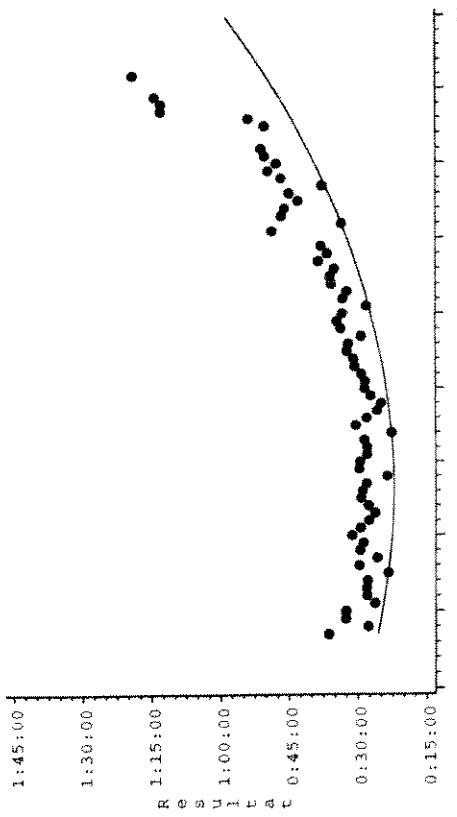
Når der som her er beregnet særsikte parametre, $\theta = (A, B, C)$, for mænd og kvinder, er det tvivl om, om det er rimeligt at rangordne de to første placeringer, når deltagerne alder ikke kendes med større precision, end det er tilfældet, idet der som tidligere nævnt

Aldersbetingede rekorder og den efficiente rand

Marselis - løbet 6,2 km mænd



Marselis-løbet 6,2 km mænd



Figur 2 Aldersbetingede rekorder 1987 - 1991 på Marselis-Løbets 6,2 km rute for mænd og kvinder (fuldt opstrukne kurve) samt de faktisk opnæde tider (•).

Tabel 3 Resultater for Marselis-Løbets 6,2 km rute, i 1991 – oprindelige placeringer og placeringer justeret for køn og alder.

Justeret Placering (a)	Løberens justerede tid (b)	Køn (c)	Opindelige placering (d)	Tid på randen (f)	fradrag (g)
R 1:45:00	0:20:37	K	34	1	0:22:36
E 1:45:00	0:20:37	M	20	1	0:20:42
S 1:40:00	0:20:38	M	74	1481	0:40:08
U 1:00:00	0:20:38	K	62	117	0:33:30
C 0:45:00	0:21:07	K	51	9	0:28:00
A 0:45:00	0:21:35	M	16	2	0:21:59
T 0:45:00	0:21:43	M	52	99	0:27:57
G 0:30:00	0:21:44	K	34	5	0:22:36
H 0:30:00	0:21:53	M	27	3	0:21:59
I 0:30:00	0:21:56	M	44	30	0:25:11
J 0:30:00	0:22:04	M	67	912	0:36:33
K 0:30:00	0:22:06	K	28	2	0:29:37
L 0:30:00	0:22:09	K	62	555	0:33:30
M 0:30:00	0:22:10	M	20	4	0:22:15
N 0:30:00	0:22:11	K	38	3	0:24:51
O 0:30:00	0:22:11	K	51	104	0:28:00
P 0:30:00	0:22:19	M	44	34	0:25:34
Q 0:30:00	0:22:46	M	28	7	0:22:56
R 0:30:00	0:22:50	M	40	22	0:24:56
S 0:30:00	0:22:51	M	23	6	0:22:51
T 0:30:00	0:22:56	M	58	387	0:32:04
U 0:30:00	0:22:57	M	21	8	0:22:59
V 0:30:00	0:23:05	K	8	6	0:27:46
W 0:30:00	0:23:13	M	27	9	0:23:19
X 0:30:00	0:23:13	K	38	21	0:24:51
Y 0:30:00	0:23:13	K	38	21	0:01:38

Anm.: Den oprindelige placering er angivet i forhold til deltageres af samme køn i samme år. Tider er angivet som timer:iminutter:sekunder.

må tages et vist forebhold for den præcise placering af funktionernes minimum og dermed også for det køsspecifikke aldersfradrag. Her er det dog valgt at bibeholde rangordningen for at fremhæve den anvendte teknik.

Det bemærkes, at de fleste af deløbere, der opnår gode placeringer under hensyntagen til alder og køn, også opnår gode placeringer, når der justeres. Men herudover bliver en

del løbere, der ellers var placeret længere tilbage, bragt ind blandt de bedste løbere i kraft af det fradrag, der tildeles dem.

5.1 Analyse af resultaterne

Ved at formulere problemstillingen inden for rammerne af en mikroøkonomisk produktionsmodel under henvisningen til forskelle i efficiens er der adgang til et veludviklet analyseapparat. I dette afsnit skal det vises, hvorledes Marselis-Lobets resultater kan analyseres ved at betragte afvigelser fra randen som "teknisk inefficiens". For at gøre dette defineres et mål for teknisk efficiens for individ i , K_i , som

$$K_i = \frac{y_i}{f(x, \theta)} = \frac{y_i}{y_t} \quad (7)$$

Dette mål er relateret både til Farrels (1957) efficiensmål og til Shephards (1970) distancefunktioner. For den specifiserede model angiver en værdi på $K_i = 1.5$ eksempelvis, at løber nummer i har fuldført løbet ved anvendelse af 50% længere tid end den teoretisk optimale tid på randen.

Det defineres også et mål for den gennemsnitlige efficiens for N individer som

$$K_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{y_t} \quad (8)$$

Det skal her foreslås, at K_t fortolkkes som et mål for populationens gennemsnitlige træningstilstand, således at mindre værdier af K_t betyder, at deltagerne gennemsnitligt ligger tætere på de optimale tider. Ved sammenligning af delpopulitioner vil der samle sig interesse ikke blot ved optimalpræstationer, men også ved de gennemsnitlige præstationer udtrykt ved K_t . Potentielle anvendelsesområder omfatter blandt andet sammenligning af forskellige træningsprogrammer, sammenligning over tid og vurdering af holdindsats.

Her skal teknikken illustreres ved at sammenligne mænd og kvinder, der gennemførte 6,2 km løbet i 1991. I tabel 5 opgives summariske data opdelt på mænd og kvinder. Det bemærkes specielt, at K_t er mindre for mænd end for kvinder.

Som følge af den måde, K_t er bestemt på, er der ikke grundlag for at antage normalfordeling, så man kan med fordel anvende nonparametriske testmetoder, der ikke kræver strenge fordelingsmæssige antagelser. Disse metoder er endda ofte nemmere at anvende end tilsvarende parametriske, og det skal også bemærkes, at selvom data skulle være normalfordelt, er nonparametriske test ofte næsten ligeså "powerfull" som parametriske. Her testes generelt, om de to grupper har samme fordeling (Kolmogorov-Smirnov test, Cramer-von Mises test, Kuiper test), og specifikt om deres gennemsnit er det samme (Mann-Whitneys U-test, Savage test, Van der Waerden test). Det findes at være signifikant, dels at mænd og kvinders afvigelser fra randen ikke har samme fordeling, og dels at mænds gennemsnitlige træningstilstand er bedre end kvinders. Detaljer om nonparametriske testprocedurer findes for eksempel i Conover (1980), og en mere omfattende diskussion af nonparametriske test i randmodeller findes i et arbejdspapir, hvor danske banker og sparekassers tekniske efficiens sammenlignes (Bukh 1993).

Tabel 4: Bedste tider opnæret i 1987-1991 på Marselis-Lobets 6,2 km rute samt randtider.

Ar	Estimerede rand mænd kvinder	Faktiske rekorder mænd kvinder	Estimerede rand		Faktiske rekorder				
			mand	kvinder	mand	kvinder			
7	0.22.39	0.25.38	0.30.30	0.36.20	49	0.25.37	0.26.39	0.28.15	0.34.21
8	0.22.24	0.25.17	0.24.46	0.27.46	50	0.26.01	0.27.94	0.28.47	0.33.15
9	0.21.11	0.24.57	0.26.92	0.32.39	51	0.26.26	0.27.30	0.30.14	0.28.00
10	0.21.58	0.24.38	0.26.34	0.32.33	52	0.26.51	0.27.57	0.27.57	0.33.09
11	0.21.46	0.24.21	0.26.51	0.26.16	53	0.27.18	0.28.25	0.31.54	0.32.21
12	0.21.35	0.24.04	0.23.54	0.27.57	54	0.27.45	0.28.55	0.31.58	0.35.42
13	0.21.26	0.23.49	0.24.26	0.28.04	55	0.28.14	0.29.26	0.34.52	0.35.56
14	0.21.17	0.23.34	0.23.41	0.27.52	56	0.28.43	0.29.56	0.30.55	0.35.03
15	0.21.09	0.23.21	0.21.53	0.23.21	57	0.29.13	0.30.29	0.29.54	0.38.28
16	0.21.01	0.23.09	0.21.50	0.29.43	58	0.29.45	0.31.93	0.32.64	0.36.33
17	0.20.55	0.22.58	0.24.21	0.25.44	59	0.20.17	0.31.38	0.36.15	0.27.52
18	0.20.50	0.22.48	0.26.37	0.29.31	60	0.30.50	0.32.14	0.36.92	0.26.48
19	0.20.45	0.22.39	0.23.24	0.28.48	61	0.31.24	0.32.51	0.39.36	0.48.38
20	0.20.42	0.22.31	0.20.42	0.31.14	62	0.31.58	0.33.29	0.35.26	0.35.30
21	0.20.39	0.22.24	0.22.59	0.29.26	63	0.32.34	0.34.08	0.38.06	0.46.35
22	0.20.38	0.22.18	0.23.42	0.27.33	64	0.33.11	0.34.48	0.32.49	0.45.54
23	0.20.37	0.22.14	0.22.51	0.26.13	65	0.33.48	0.35.29	0.41.46	0.42.55
24	0.20.37	0.22.10	0.23.36	0.27.39	66	0.34.27	0.36.12	0.36.33	0.44.53
25	0.20.38	0.22.08	0.22.58	0.29.17	67	0.35.06	0.36.55	0.36.33	0.37.39
26	0.20.40	0.22.07	0.22.29	0.28.57	68	0.35.46	0.37.40	0.29.24	0.46.40
27	0.20.43	0.22.06	0.21.59	0.28.04	69	0.36.27	0.38.26	0.40.28	0.47.38
28	0.20.47	0.22.07	0.22.56	0.23.70	70	0.37.10	0.39.13	0.40.52	0.47.38
29	0.20.51	0.22.09	0.24.14	0.29.41	71	0.37.53	0.40.01	0.42.27	0.50.12
30	0.20.57	0.22.12	0.24.06	0.29.30	72	0.38.37	0.40.50	1.07.06	0.50.55
31	0.21.04	0.22.16	0.26.09	0.27.56	73	0.39.21	0.41.40	-	-
32	0.21.11	0.22.22	0.26.42	0.27.55	74	0.40.07	0.42.31	0.40.08	-
33	0.21.19	0.22.28	0.25.16	0.28.30	75	0.40.54	0.43.23	-	0.50.12
34	0.21.29	0.22.36	0.25.00	0.22.36	76	0.41.41	0.44.17	-	0.53.45
35	0.21.39	0.22.44	0.26.19	0.30.22	77	0.42.30	0.45.11	0.52.57	1.12.52
36	0.21.50	0.22.54	0.25.06	0.28.00	78	0.43.19	0.46.07	-	1.12.46
37	0.22.02	0.23.05	0.28.14	0.25.43	79	0.44.09	0.47.04	-	1.14.11
38	0.22.15	0.23.16	0.27.14	0.24.51	80	0.45.01	0.48.01	-	-
39	0.22.29	0.23.49	0.25.27	0.27.91	81	0.45.53	0.49.00	-	-
40	0.22.43	0.23.43	0.23.15	0.28.28	82	0.46.46	0.50.00	-	1.18.52
41	0.22.59	0.23.58	0.26.27	0.28.22	83	0.47.40	0.51.01	1.20.17	-
42	0.23.16	0.24.15	0.28.18	0.29.09	84	0.48.35	0.52.03	1.24.01	-
43	0.23.33	0.24.32	0.25.08	0.30.37	85	0.49.30	0.53.07	1.38.25	-
44	0.23.51	0.24.50	0.25.11	0.30.52	86	0.50.27	0.54.11	-	-
45	0.24.11	0.25.10	0.25.45	0.32.17	87	0.51.25	0.55.16	-	-
46	0.24.31	0.25.30	0.26.46	0.31.54	88	0.52.23	0.56.23	-	-
47	0.24.52	0.25.52	0.25.98	0.29.09	89	0.53.23	0.57.31	-	-
48	0.25.14	0.26.15	0.25.53	0.33.33	90	0.54.23	0.58.39	-	-

Ann.: ^a angiver, at ingen tredje denne alder har deltaget i perioden 1987-1991.

Tabel 5: Summariske data for Marselis-Løbets 6,2 km/rute i 1991 – opdelt efter køn.

	Gens.	Svd.	Dev.	Minimum	Maximum
Kvinder (N=2985)					
Alder (år)	29,92	13,23	7	75	
Resultat (sek.)	3494,72	1217,54	1356	10751	
K	2,4610	0,88201	1,00003084	8,1003171	
Mænd (N=2145)					
Alder (år)	27,70	14,70	7	74	
Resultat (sek.)	3076,74	1367,49	1242	10772	
K	2,2981	1,0398	1,00000580	8,6076771	

Anm.: K angiver inefficiens, som defineret i (8)

Ved at beregne \bar{K} for en årrække, som det er gjort i tabel 6, kan ændringer i trænings-tilstand jagtgettes. Resultaterne her giver dog ikke umidbart anledning til at videreføre analysen.

Tabel 6
Udvikling i den gennemsnitlige afvigelse fra den effektive rand, \bar{K} , bestemt af de bedste resultater på Marselis-Løbets 6,2 km/rute for Kvinder og mænd i perioden 1987-1991.

	1987	1988	1989	1990	1991
Kvinder	2,587	2,302	2,337	2,466	2,441
Mænd	2,754	2,201	2,230	2,349	2,230

Randen af optimale præstationer er her beregnet på grundlag af alle observationer i perioden 1987-1991. En nærliggende udvidelse af analysen kunne være at beregne et sæt parametre for hver år særskilt. I produktivitetsanalyser har beregning af såkaldte Malmquist indices i de seneste par år været populære indfaldsvinkler (Forsund 1990; Berg, Forsund og Jansen 1992; Färe *et al.* 1990) ved studier af præstationsudvikling over tid. Dette indeks, der kan dekomponeres multiplikativt i en komponent, der angiver ændring i randen, og en komponent, der angiver ændring i deltagernes placering i forhold til randen, kunne beregnes for Marselis-Løbets data. Se også Grosskopf (1993) for en oversigt over forskellige metoder, der har været anvendt til analyse af præstationsændringer over tid.

5.2 Stjernetider

Idet K_i som diskuteret i afsnit 5.1 kan fortolkes som deltager i 's træningstilstand, er det nærliggende at specificere K_i -værdier som grænser for opnåelsen af stjernetider. Denne

grænse betegnes K^* , og principippet for tillægning af stjernetid bliver således:

$$\text{Hvis } y_i \leq f(x, \theta) K^*, \text{ da tildeler stjernetid.}$$

Det bemærkes, at dette princip for tillægning af stjernetider sværer til, at der tillades en fast procentuel afvigelse fra de teoretisk optimale præstationer. Som alternativt princip kan der tillades en fast additiv afvigelse. Denne afvigelse betegnes K° , og beslutningsregelen kan formuleres som:

$$\text{Hvis } y_i \leq f(x, \theta) + K^\circ, \text{ da tildeler stjernetid.}$$

De to principper vil generelt give forskellige resultater, og den skal ikke her gives sports-politiske argumenter for den ene frem for den anden. Men det skal bemærkes, at anvendelse af det multiplikative tillæg, K^* , ved fastlæggelsen af stjernetider stemmer bedst overens med den mikroøkonomiske produktions-teori og derfor giver de bedste analysemuligheder. Det er dog ofte fremsat, at det er højst problematisk, hvis matematiske behageligheder skal dirigere, hvad der giver den bedste beskrivelse af virkeligheden eller skal bestemme den valgte politik.

For at demonstrere konsekvenserne af disse principper for fastlæggelse af stjernetider gennemføres beregninger af stjernetider for alle deltagere i Marselis-Løbets 6,2 km/rute i 1991 ved anvendelse af to forskellige multiplikative tillæg og to forskellige additive tillæg som sammenfattet i tabel 7.

Tabel 7: Oversigt over de anvendte stjernetidsprincipper.

1	$K^* = 1,50$	Multiplikativt tillæg på 50%	(tabel 8)
2	$K^* = 1,70$	Multiplikativt tillæg på 70%	(tabel 8)
3	$K^\circ = 10$	Additivt tillæg på 10 min.	(tabel 9)
4	$K^\circ = 15$	Additivt tillæg på 15 min.	(tabel 9)

De valgte værdier for K^* og K° i tabel 7 er valgt, så der bliver en "rimelig" fordeling mellem stjernetider og ikke-stjernetider, d.v.s. en fordeling, der overordnet er i samme størrelsesorden som den, Marselis-Løbets ledelse anvender på 12 km ruten. Stjernetiderne tillades på baggrund af de aldersspecifikke kriterier, neden vises i tabellerne 9 og 8 aggregeret på de samme aldersgrupper, som anvendt i tabel 1.

Tabel 9 og 8 bekrafter testresultaterne fra forrige afsnit, idet der er flere mænd end kvinder, der tildeler stjernetider, hvilket fortolkes ved at de deltagende mænd er i bedre form en kvinderne. For begge principper ses det, at det er relativt opnåeligt for deltagere over fx. 50 år at opnå stjernetider, hvilket kan have betydning for at få flere deltagere i de højere aldersklasser med og derved tilskynde, at man holder sig i form.

De to principper giver nogenlunde samme resultater bortset fra, at der er væsentligt flere deltagere i enderne af aldersfordelingen, d.v.s. under 12 år og over 50 år, der opnår stjernetider ved et multiplikativt tillæg end ved det additive tillæg.

Det bemærkes endelig, at der under begge præciseringer er stor forskel på kvinder og mænds træningsstilstand i aldersgruppen 15-34 år, da betydeligt flere mænd vil få tildelt stjernetider. Det er næppe muligt at konkludere noget på baggrund af resultatlisterne for 6,2 km løbet alene. Der må ses på, hvorledes resultatlisterne er for 12 km løbet, da der kan være forskel på, hvor god form deltagerne, der vælger den ene distance frem for den anden, er i. Desuden må forskellige former for baggrundsinformation, f.eks. vdr. 15-34 åriges sportsudøvelser, inddrages.

Resultaterne specificerer for de enkelte alderstrin (ikke vist her) indikerer, at drenge træningsstilstand omkring 12 års alderen begynder at blive markant bedre end for pigerne, og at denne forskel holder sig frem til omkring 20 års alderen, hvor forskellen gradvis bliver formindsket frem til 40 års alderen. Disse resultater kunne give anledning til en hypotese om, at drenge ofte dyrker mere sport (f.eks. fodbold) end piger, og at de derfor er i bedre fysisk form igennem hele ungdommen; eller måske holder piger op med at dyrke sport omkring 12 års alderen.

6 Sammenfatning og afsluttende bemærkninger

I dette notat er det fremhavet, at man ikke ukritisk kan estimerere gennemsnitsfunktioner uden at overveje, om man rent faktisk er interesseret i at vurdere gennemsnitsstanden. Det er et fænomen, der er velkendt i den empirisk orienterede driftsøkonomiske litteratur, da man ofte beskæftiger sig med egenskaber og kendtegns, der ikke er gennemsnitsfænomener.

Den ortodokse teori antager, at alle virksomheder er fuldt effektive, men dette repræsenterer sjældent en realistisk antagelse. Den samme synsvinkel repræsenteres af traditionel økonometrisk metode, hvor afvigelser fra gennemsnitsstanden opfattes som målfejl etc. Som et alternativ til estimation af gennemsnitsfunktioner er randfunktioner blevet fremhavet med udgangspunkt i den mikroøkonomiske produktionsteori.

For at vise, hvorledes randfunktioner kan anvendes, var der hentet et eksempel uden for den verden, økonomerne normalt beskæftiger sig med. Aigner og Chuus estimationsmetode blev anvendt til at demonstrere, hvorledes der kan udregnes handicaps for et motionsløb. Desuden blev der givet forslag til, hvorledes forskellige former for analyser af sportssætter kan foretages ved anvendelse af teknikker fra den mikroøkonomiske produktionsteori. Metoden kan finde anvendelse i en lang række discipliner indenfor for eksempel motorsport og sejlsport, hvor man kan tanke sig, at præstationer justeres for egenskaber ved både eller kørerej, og alle derfor deltaget på lige vilkår.

I den visse anvendelse estimeredes en særskilt funktionel sammenhæng for hvert køn, således at præstationen i realiteten var en funktion af en variabel. Det er den letteste situation at vise grafisk, men metodisk er der ingen problemer ved at lade den teoretisk optimale præstation bestemmes som funktion af flere variabler, f.eks. bådstørrelse, sejlstørrelse etc. Metoden kan også anvendes uden for sportens verden. Det er for eksempel abertlyst, at den fysiske ydeevne på arbejdsmarkedet i visse arbejds situationer er aldersbetinget. Præstationsafslønnings, der ikke tager hensyn hertil, vil nødvedigvis give yngre

og ældre medarbejdere lavere indtjening. Hvis dette ikke ønskes, men man i stedet foretrækker at afmonne efter indsats givet ligefysiske muligheder (alder), haves her et redskab til at fastlægge aldersbetegnede præstationskrav.

Referencer

- Aigner, D. J. og S. F. Chu. 1968. On Estimating the Industry Production Function. *American Economic Review* 58(4):826-839.
- Banker, Rajiv D. 1985. Productivity measurement and management control. I *The Management of Productivity and Technology in Manufacturing*, Paul R. Kleinendorfer (ed.). New York: Plenum Press.
- Banker, R. D., og Srikant M. Datar. 1987. Accounting for Labor Productivity in Manufacturing Operations: An application. I *Field Studies in Management Accounting and Control*, W. Bruns og R. Kaplan (eds.). Cambridge: Harvard Business School Press.
- Bauer, P. W. 1990. Recent Developments in the Econometric Estimation of Frontiers. *Journal of Econometrics* 46:39-56.
- Berg, Sigmund Aile, Finn R. Førsund, og Eilev S. Jansen. 1992. Malmquist Indices of Productivity Growth During the Deregulation of Norwegian Banking 1989-1989. *Scandinavian Journal of Economics* 94:S212-S228.
- Blaug, Mark. 1992. *The Methodology of Economics: Or How Economists Explain*, second edition. Cambridge: Cambridge University Press.
- Brooke, Anthony, David Kendrick, og Alexander Meeraus. 1988. *GAMS User's Guide*. South San Francisco: The Scientific Press.
- Bukh, Per Nikolaj D. 1992. Technical Efficiency and Returns to Scale in the Danish Banking Sector: An Application of a Nonparametric Estimation Method. IFV-Papers 92-5. Institute of Management, University of Aarhus (revideret, juni 1993).
- Bukh, Per Nikolaj D. 1993. An Assessment of Technological Differences in the Danish Banking Sector using Inter-sample Efficiency Measures. Working paper, Institute of Management, University of Aarhus.
- Camm, Jeffrey D. og Thomas J. Grogan. 1988. An Application of Frontier Analysis: Handicapping Running Races. *Interfaces*, 18(6):52-60.
- Camm, Jeffrey D. og Thomas J. Grogan. 1992. Handicapping Running Races: The New Frontier. Working paper, Department of Quantitative Analysis & Information Systems, University of Cincinnati.
- Charnes, A., og W. W. Cooper. 1961. *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, volume I. New York: John Wiley & Sons.
- Charnes, A. og W. W. Cooper. 1985. Preface to Topics in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research* 2:59-94.
- Charnes, A. og W. W. Cooper. 1989. Data Envelopment Analysis. CCS Research Report no. 626, Center for Cybernetic Studies, The University of Texas. Bringes

- i *Proceedings of the 12th Triennial Conference of the International Federation of Operations Research Societies*.
- Charnes, A. og W. W. Cooper. 1990. DEA Usages and Interpretations. National Contribution of U.S.A. IIFFORS '90 - 12th Triennial Conference on Operations Research, Athens, Greece – June 25-29, 1990.
- Charnes, A. og W. W. Cooper, Z. M. Huang og D. B. Sun. 1993. Uses of Data Envelopment Analysis in Decision Support Systems for Guiding Bank Audits and Evaluations. Bringres i *Data Envelopment Analysis: Theory, Practice Methods and Process*, A. Charnes, W. W. Cooper, A. Y. Lewin og L. M. Seiford (eds.) IC² Management and Management Science Series, New York: Quorum Books.
- Charnes, A., W. W. Cooper og E. Rhodes. 1978. Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operations Research* 2:429–444.
- Charnes, A., W. W. Cooper og E. Rhodes. 1981. Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through. *Management Science* 27(6):668-697.
- Charnes, A., W. W. Cooper og R. M. Thrall. 1991. A structure for classifying and characterizing efficiency and inefficiency in data envelopment analysis. *Journal of Productivity Analysis* 2(3):197–236.
- Conover, W. J. 1980. *Practical Nonparametric Statistics*, second edition. New York: John Wiley & Sons.
- Daft, Richard L. og Arie L. Lewin. 1990. Can Organizational Studies Break out of the Normal Science Stratijacket? An Editorial Essay. *Organization Science* 1(1):1-9.
- Frisch, Ragnar. 1962. *Inledning til produksjonssteorien*, 9. utgave. Oslo: Universitetsforlaget.
- Hjalmarsson, Lennart. 1991. Metoder i Forskning om Produktivitet och Effektivitet med Tillämpningar på Offentlig Sektor. Rapport til Expertgruppen för studier i offentlig ekonomi, Ds 1391/20, Finansdepartementet.
- Hoel, Michael og Karl Ove Moene. 1987. *Produktionsteori*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Jennergren, L. Peter og Birge Obel. 1985. Forskungsevaluering – eksemplificeret ved 22 økonomiske instituter. *Økonomi og Politik*, 86:86–95.
- Farrell, M. J. 1957. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, ser. A*, 120(3):253–289.
- Finansministeriet og Undervisningsministeriet. 1992. Produktivitetsanalyse af seminarieområdet. København: Finansministeriet.
- Finansministeriet og Arbejdsmarkedet. 1992. Produktivitetsanalyse af arbejdsformidlingen. København: Finansministeriet.
- Forsund, Finn R. 1990. The Malmquist Productivity Index. Memorandum from Department of Economics, University of Oslo
- Forsund, Finn og Lennart Hjalmarsson. 1974. On the Measurement of Productive Efficiency. *Swedish Journal of Economics* 76:141–154.
- Forsund, Finn R. og Lennart Hjalmarsson. 1970a. Generalised Farrell Measures of Efficiency: An Application to Milk Processing in Swedish Dairy Plants. *The Economic Journal*, 89:294–315.

- Forsund, Finn og Lennart Hjalmarsson. 1979b. Frontier Production Functions and Technical Progress: A Study of General Milk Processing in Swedish Dairy Plants. *Econometrica* 47(4):883–909.
- Forsund, Finn og Lennart Hjalmarsson. 1987. *Analysis of Industrial Structure: A Putty-clay Approach*. The Industrial Institute for Economic and Social Research, Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Forsund, Finn R., C. A. Knox Lovell og Peter Schmidt. 1980. A Survey of Frontier Production Functions and of Their Relationship to Efficiency Measurement. *Journal of Econometrics* 13:5–25.
- Färe, Rolf. 1975. Efficiency and the production function. *Zeitschrift für Nationalökonomie* 35(3/4):317–324.
- Färe, Rolf, S. Grosskopf og C. A. K. Lovell. 1985. *The Measurement of Efficiency of Production*. Boston: Kluwer-Nijhoff Publishing.
- Färe, Rolf, S. Grosskopf, C. A. K. Lovell, og C. Paauwka. 1989. Multilateral Productivity Comparisons When Some Outputs are Undesirable: A Nonparametric Approach. *The Review of Economics and Statistics* LXXI(1):90–98.
- Färe, Rolf og C. A. K. Lovell. 1978. Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic Theory* 19(1):150–162.
- Färe, R., S. Yasawarng, S.-K. Li, og Z. Wang. 1990. Productivity growth in Illinois utilities. *Resources and Energy* 12, 383–398.
- Greene, William H. 1993. The Econometric Approach to Efficiency Measurement. In Harold Fried, C. A. Knox Lovell, og Shelton S. Schmidt (eds.). *New York: Oxford University Press*.
- Grogan, Thomas J., Bradley R. A. Wilson og Jeffrey D. Camm. 1991. The Relationship Between Age and Optimal Performance of Elite Athletes in Endurance Running Events. *Research Quarterly for Exercise and Sport* 62(3):333–339.
- Grosskopf, S. 1993. Efficiency and Productivity. In *The Measurement of Productivity: Techniques and Applications*, Harold O. Fried, C. A. Knox Lovell, og Shelton S. Schmidt (eds.). New York: Oxford University Press.
- Holved, Torben og Jens Leth Hougaard. 1992. On the measurement of technical efficiency for similar production units: 80 danish hospitals. Paper presented at the Nordic Workshop in Productivity, Growth and Development, Göteborg, November 25-27, 1992.
- Israelsen, Paul. 1993. *Activity- versus Variability-Based Management Accounting*. København: Jurist- og Økonomiforbundets Forlag/ Djøf Publishing.
- Knudsen, Christian. 1991. *Økonoms metodologi: Om videnskabsidéer, forklarings-typer og forskningsstrukturer*. København: Jurist og Økonomiforbundets Forlag.
- Lawrence, Paul R., og Jay W. Lorsch. 1967. *Organization and Environment: Managing Differentiation and Integration*. Boston: Division of Research, Harvard Business School.
- Lewin, Arie Y. 1992. On Learning from Outliers. I *Systems and Management Science by Extremal Methods, Research Honoring Abraham Charnes at Age 70*, Fred Young Phil-

lips og John James Rouseau (eds.). Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers.

Lewin, Arie Y. og John W. Minton. 1986. Determining Organizational Effectiveness: Another Look and an Agenda for Research. *Management Science* 32(5):514-538.

Madsen, Vagn. 1969. *Regnskabsvæsenets opgaver og problemer – i ny betydning*, anden udgave. København.

Marselis Løbet. 1991. *Marselis-Løbet 91, Resultatliste*. Peters, Thomas J. og Robert H. Waterman, jr. 1982. *In search of Excellence*. New York: Harper and Row.

Pedersen, Peter Bogetoft, Ole Olesen og Niels Christian Petersen. 1987. Produktivitets-evaluering af 96 danske sygehuse – en præsentation af DEA-metoden og et eksempel på dens anvendelse. *Lødelse og Erhvervsøkonomi*, 2:67-81.

Petersen, Niels Christian. 1989. Anvendelse af Data Envelopment Analysis til Produktivitets-evaluering i Danske Toldkamre. Publications from Department of Management No. 4/1989, Odense University.

Salter, W.E.G. 1960. *Productivity and Technical Change*. Cambridge: Cambridge University Press.

Schmidt, Peter. 1976. On the Statistic Estimation of Parametric Frontier Production Functions. *Review of Economics and Statistics* 58:238-239.

Shephard, Ronald W. 1970. *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton: Princeton University Press.

Seford, Lawrence M. 1990. A bibliography of Date Envelopment Analysis (1978-1990). Research Report, Department of Industrial Engineering and Operations Research, The University of Massachusetts.

Sims, T. F. 1992. Quantifying Management's Role in Bank Survival. *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Dallas, January, 29-41.

Sengupta, Jati K. 1989. *Efficiency Analysis by Production Frontiers: The Nonparametric Approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, Peter. 1976. On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Functions. *Review of Economics and Statistics*, 58:238-239.

Schmidt, Peter. 1985. Frontier Production Functions. *Econometric Reviews* 4(2):289-328.

Thompson, R. G., F. D. Singleton, Jr., R. M. Thrall, og B. A. Smith. 1986. Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas. *Interfaces* 16(6):35-47

Tabel 8
Fordelingen af stjernetider på Marselis-Løbets 6,2 km rute i 1991, hvis der tillades henholdsvis 50 % og 70% afvigelse fra de optimale præstationer.

Aldersgruppe	Kvinder	antal	pct.			antal	pct.		
			ja	nej	i alt				
Indtil 50 % afvigelse fra rand giver stjernetid ($K^* = 1,50$)									
7 - 8 år	5	111	116	4.31	95.69	5	144	3.36	96.54
9 - 10 år	7	133	140	5.00	95.00	22	148	170	12.94
11 - 12 år	9	130	139	6.47	93.53	31	145	176	17.61
13 - 14 år	13	110	123	10.57	89.43	34	90	124	27.42
15 - 19 år	13	195	208	6.25	93.75	50	106	156	32.05
20 - 34 år	60	1039	1069	5.46	94.54	115	493	608	81.09
35 - 39 år	22	374	396	5.56	94.44	25	207	232	19.78
40 - 44 år	18	339	357	5.04	94.96	36	192	228	15.79
45 - 49 år	21	207	228	9.21	90.79	30	123	153	19.61
50 - 54 år	15	74	89	16.85	83.15	24	54	78	30.77
55 - 59 år	9	34	43	20.93	79.07	9	27	36	25.00
60 - 64 år	3	26	29	10.34	89.66	6	16	22	27.27
65 - 69 år	3	11	14	21.43	78.57	3	7	10	30.00
70 - 74 år	2	1	3	66.67	33.33	2	1	3	66.67
75 - 79 år	0	1	1	0.00	100.00	-	-	-	-
Total	200	2785	2985	6.70	93.30	392	1753	2145	81.72
Indtil 70 % afvigelse fra rand giver stjernetid ($K^* = 1,70$)									
7 - 8 år	15	101	116	12.93	87.07	17	132	149	11.41
9 - 10 år	18	122	140	12.86	87.14	53	117	170	31.18
11 - 12 år	24	115	139	17.27	82.73	64	112	176	36.36
13 - 14 år	41	82	123	33.33	66.67	59	65	124	47.58
15 - 19 år	44	164	208	21.15	78.85	80	76	156	51.28
20 - 34 år	197	902	1099	17.93	82.07	211	397	608	34.70
35 - 39 år	56	340	396	14.14	85.86	53	179	232	22.84
40 - 44 år	69	288	357	19.33	80.67	75	153	228	32.89
45 - 49 år	58	170	228	25.44	74.56	60	93	153	39.22
50 - 54 år	34	55	89	38.20	61.80	35	43	78	44.87
55 - 59 år	13	30	43	30.23	69.77	10	26	36	27.78
60 - 64 år	8	21	29	27.59	72.41	13	9	22	59.99
65 - 69 år	4	10	14	28.57	71.43	4	6	10	40.00
70 - 74 år	2	1	3	66.67	33.33	2	1	3	66.67
75 - 79 år	1	0	1	100.00	0.00	-	-	-	-
Total	584	2401	2985	19.56	80.44	736	409	2145	34.31
									65.69

Tabel 9
Fordelingen af stjernetider på Marselis-Lobets 6,2 km rute i 1991, hvis der tillades henholdsvis 10 og 15 minutters afvigelse fra de optimale præstationer.

Aldersgruppe	Kvinder			Mænd				
	antal	pct.	antal	pct.	antal	pct.		
	ja	nej	i alt	ja	nej	i alt	ja	nej
Indtil 10 minutters afvigelse fra rand giver stjernetid ($K^o = 10$)								
7 - 8 år	2	114	116	1.72	98.28	3	149	2.01
9 - 10 år	4	136	140	2.86	97.14	20	150	1.70
11 - 12 år	6	133	139	4.32	95.68	23	153	1.76
13 - 14 år	9	114	123	7.32	92.68	32	92	1.24
15 - 19 år	9	199	208	4.33	95.67	46	110	1.56
20 - 34 år	36	1063	1099	3.28	96.72	108	500	608
35 - 39 år	10	386	396	2.53	97.47	19	213	232
40 - 44 år	9	348	357	2.52	97.48	24	204	228
45 - 49 år	5	223	228	2.19	97.81	20	133	153
50 - 54 år	6	83	89	6.74	93.26	15	63	78
55 - 59 år	3	40	43	6.98	93.02	7	29	36
60 - 64 år	3	26	29	10.34	89.66	3	19	22
65 - 69 år	2	12	14	14.29	85.71	3	7	10
70 - 74 år	0	3	3	0.00	100.00	2	1	3
75 - 79 år	0	1	1	0.00	100.00			
Total	104	2881	2985	3.48	96.52	325	1820	2145
Indtil 15 minutters afvigelse fra rand giver stjernetid ($K^o = 15$)								
7 - 8 år	10	106	116	8.62	91.38	14	135	149
9 - 10 år	11	129	140	7.86	92.14	49	121	170
11 - 12 år	15	124	139	10.79	89.21	61	115	176
13 - 14 år	25	98	123	20.33	79.67	59	65	124
15 - 19 år	26	182	208	12.50	87.50	81	75	156
20 - 34 år	179	920	1099	16.29	83.71	219	389	608
35 - 39 år	51	345	396	12.88	87.12	51	181	232
40 - 44 år	49	308	357	13.73	86.27	60	168	228
45 - 49 år	33	195	228	14.47	85.53	50	103	153
50 - 54 år	23	66	89	25.84	74.16	29	49	78
55 - 59 år	8	35	43	18.60	81.40	9	27	36
60 - 64 år	3	26	29	10.34	89.66	6	16	22
65 - 69 år	2	12	14	14.29	85.71	3	7	10
70 - 74 år	1	2	3	33.33	66.67	2	1	3
75 - 79 år	0	1	1	0.00	100.00			
Total	426	2549	2985	14.61	85.39	633	1452	2145